Colle du 25/05 - Sujet 1
Intégration et représentation matricielle

Question de cours. Démontrer la formule de la matrice de la composition.

Exercice 1. Soit $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}$. Faire une étude complète de φ.

Exercice 2. Soit E un espace de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $\mathscr{B}' = (e_1 - e_3, e_1 - e_2, e_2 + e_3 - e_1)$.

1. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E et préciser $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ et $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.
2. Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ par deux méthodes.

Colle de mathématiques PTSI1 2022-2023

Colle du 25/05 - Sujet 2
Intégration et représentation matricielle

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème fondamental de l'analyse.

Exercice 1. Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^{n} \left(k^2 + n^2\right)^{1/n}$.

Exercice 2. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^p = I_n$. On pose également $B = I_n + A + \cdots + A^{p-1}$, $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A et $v \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ celui associé à B.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont supplémentaires.
4. Déterminer la matrice de v dans une base adaptée à $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$.

Colle de mathématiques PTSI1 2022-2023

Colle du 25/05 - Sujet 3
Intégration et représentation matricielle

Question de cours. Démontrer la formule de la matrice du vecteur image.

Exercice 1. Soit $n \geqslant 2$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = \frac{P(X+1)+P(X-1)}{2}$ et $g = f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$.

1. On suppose $n = 4$.
   (a) Déterminer la matrice de f dans la base canonique. En déduire le noyau et l'image de f.
   (b) Même question pour g.
2. On reprend n quelconque. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $\deg(g(P))$ en fonction de celui de P.
3. En déduire le noyau et l'image de g.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et converge.

Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} I_n$.